2015-2018届高中生思想方法与解题技巧检测及教师教学质量监测卷

科目:数学　　建议用时:5 h以内　　满分:210分　　出题人(包括但不仅限于):zkw

本试卷组成:必做部分:1-10(选择题),11-22(填空题),23-32(解答题) 选做部分:33-34(解答题)

其中,选择题、填空题每道5分,其余以题目前标注为准.

必做部分

1.集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,非空集合 B,C 满足 $B\cup C=A$, $B\cap C=\varnothing$,且 $\mathrm{Card}(B)\notin B$, $\mathrm{Card}(C)\notin C$,则这样的集合对 (B,C) 有几组

A.40　　B.42　　C.44　　D.46

2.下列说法正确的有几个

①定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$,且 $f(1)=1$,则 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=x$

②定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$ 满足 $f(ab+1)=f(a)+f(b)$,则这样的 $f(x)$ 有且只有一个

③若定义在 $\mathbf{N}^*$上的函数 $f(x)$ 递增,且 $f(f(x))=3x$,则 $f(x)$ 唯一且 $f(3^n)=2\cdot 3^n$

④存在某非常值函数的周期函数,其最小正周期不存在

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.下列说法正确的有几个

① $m\in\mathbf{N}^*$,则"2^m+1为质数"的充要条件是"$\log_2 m$为整数"

② $f(x)=|x^2+ax+b|, x\in[-1,1]$,则"对于 $\forall a,b\in\mathbf{R}, m<f(x)_{\max}$"的必要不充分条件是"$m<\frac{1}{2}$"

③数列$\{a_n\}$由正整数构成,且满足对任意正整数 n,均有 $a_{a_n}+a_n=2n$,则 $a_n=n$

④函数 $f(x)=x^{x^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4.α,β,γ 是三次方程 $x^3+ax+b=0(b\neq 0)$ 的三根,则以 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}$ 为三根的方程为

A. $a^2x^3+2abx^2+b^2x-a=0$　　B. $b^2x^3+2abx^2+a^2x-b=0$

C. $a^2x^3+2ab^2x^2+bx-a=0$　　D. $b^2x^3+2a^2bx^2+ax-b=0$

5.用一距一半径为 R 的球的球心距离为 $d(d<R)$ 的平面截球,得到的两部分中较小一部分的体积为

A. $\frac{2\pi R(R-d)^2}{3}$　　B. $\frac{\pi(R-d)^2(2R+d)}{3}$

C. $\frac{2\pi(R-d)^2(R+d)}{3}$　　D. $\frac{\pi(R-d)^2(2R-d)}{3}$

6.$\triangle ABC$ 内接于单位圆,三个内角 A,B,C 的平分线延长后分别交此圆于 A_1,B_1,C_1.则 $\dfrac{AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为

A.2　　B.1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2(\sqrt{3}-1)$

7.平面直角坐标系中,第二象限中有两点 A、B,O、A、B 三点共线,且 $|OA|=a,|OB|=b$.x 轴正半轴上有一点 P,则当 $\angle APB$ 最大时,P 点横坐标为

A. $\frac{a+b}{2}$　　B. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　C. $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$　　D. $\sqrt{ab}$

8.由空间中一点 P 引出三条射线,上有三点 A,B,C.设 $\angle BPC=\alpha,\angle CPA=\beta,\angle APB=\gamma\left(\gamma>\beta>\alpha\right)$.若无论 A,B,C 如何运动,$\triangle ABC$ 恒为锐角三角形.则

A. $\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta$　　B. $\cos\gamma < \cos\alpha\cos\beta$

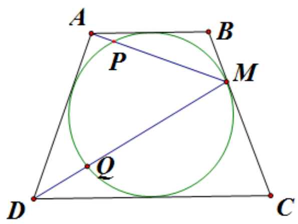
C. $\sin\gamma > \sin\alpha\sin\beta$　　D. $\sin\gamma < \sin\alpha\sin\beta$

9.对于 $x\in(-\pi,\frac{5}{2}\pi)$,方程 $k(\frac{k_1\sin x+k_2\cos x}{k_1\sin x-k_2\cos x}+a)=x-\frac{\pi}{4}$ 当 $k=k_0$ 时无解,且此方程对于任意的 k 总不会有 4 根,则 $\frac{k_1+k_0}{k_2+a}=$

A.1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D.0

10.等腰梯形 $ABCD$ 外接于圆,一腰与圆相切于 M.连接 AM,DM,与圆分别交于 P,Q,则 $\frac{AM}{AP}+\frac{DM}{DQ}=$

A.6　　B.8　　C.10　　D.12



11.化简:

① $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}}+\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}}=$_________.

② $\frac{(5^{\lg 7}\cdot 7^{\lg 2})^{\lg 3}}{3^{\lg 7}}=$_________.

③ $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}}=$_________.

④ $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdots\cdots}}}}=$_________.

⑤ $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}=$_________.

12.若 $ax^2-(a+1)x-2a=0$ 在 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,3)$ 上有且只有一根,则 $a\in$_________.

13.△ABC 中, $a\cos A:b\cos B:c\cos C=3:4:5$,则 $\cos C$=_________.

14.方程 $x^{k-x}=(k-x)^x(0\le x\le k)$ 有一根,则 $k\in$_________.

15.方程 $x^2+y^2-|x+y|-|x-y|=x-2y+2k=0$ 的解有且恰有三个,则 k=_________.

16.对于 $a>0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $a^x\ge x^a$ 恒成立,则 $a\in$_________.

17.定义新运算 $m*n=\frac{mn+1}{m+n}$,则$(\cdots((100*99)*98)*\cdots*3)*2$=_________.

18. 密度均匀的三角形框架的质心为此三角形_________.

19.若 $x,y>0,x^2+y^2=1$,则 $\frac{8}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为_________.

20.已知 $x>y>0,xy=1$,则 $\frac{x^3+y^3}{x-y}$ 的最小值为_________.

21.已知 $a_1,a_2\ldots\ldots a_{2016}\subseteq[-2,2]$, $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{2016}=0$,则 $a_1^3+a_2^3+\ldots\ldots+a_{2016}^3$ 的最大值为_________.

22.设 ΔABC 三边长为 a,b,c,面积为 S, ΔABC 内有一点 O 满足 $\angle ABO=\angle BCO=\angle CAO=\theta$,则 $\tan\theta$ =_________.(用 a,b,c,S 表示)

23. (12 分)导数对于研究很多超越函数的性质起到了很大作用

(1)若对于 $\forall x>0,xe^{2x}-kx-\ln x-1\ge 0$ 恒成立,求 k 的取值范围

(2)若 $0<a<b,a^b=b^a$,求 $a^{e(e-2)}\cdot b$ 的最小值

24. (6 分)△ABC 中,AD 为角平分线.

(1)是否存在△ABC,使 $AD^2=AB\cdot AC$

(2)若 $\dfrac{AD^2}{AB\cdot AC}=\dfrac{3}{4}$,求证:△$ABC$ 三边成等差数列

(3)在(2)的条件下,求证: $2\sin\dfrac{A}{2}=\sin(B+\dfrac{A}{2})=\sin(C+\dfrac{A}{2})$

25. (6 分)高斯首次严格证明了代数学基本定理: n 次方程在复数域内有且只有 n 个根(重根按重数计算). 如, $x^2=1$ 有两根 ±1; $x^4=1$ 有四根 ±1, ±i

(1)试求 $x^3=1$ 在复数范围内的三根

(2)对于无二次项的三次方程 $x^3+px+q=0$ 有如下解法:

设 $x=m+n$,方程化为 $m^3+n^3+q+(m+n)(3mn+p)=0$

此时令 $\begin{cases} m^3+n^3+q=0 \\ 3mn+p=0 \end{cases}$,即可解出 m 与 n,于是 $x=m+n$

请据此求出 $x^3+3x+2=0$ 在复数范围内的三个根

26.(8 分)椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,左右焦点 F_1,F_2, A,B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点,且 $F_1A\,//\,F_2B$, F_1B 交 F_2A 于点 P,过 P 作 $PH\,//\,F_1A\,//\,F_2B$ 交 x 轴于点 H

(1)求证: $|PH|$ 为定值

(2)求证: $|PF_1|+|PF_2|$ 为定值

27.(10 分)椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,右焦点 F_2,焦距 $2c$

(1) $O_1:x^2+y^2=b^2$, O_1 的某条切线在 x 轴上截距为正,与 C 交于 M,N 两点.求证:△F_2MN 周长为定值

(2)设 P 为 C 上一点,过 P 作半径为 $\dfrac{ab}{c}$ 的圆 O_2,过原点作 O_2 的切线 l_1,l_2,与 C 分别交于 A,B.求证: $|OA|^2+|OB|^2$ 为定值

28.(6 分)众所周知,无穷级数求和不能随意更改求和次序.如下面的错位相加法是错误的.

设 $S_n=1-1+1-1+\ldots\ldots$ $2S_n=\begin{pmatrix}1-1+1-1\ldots\ldots \\ +1-1+1\ldots\ldots\end{pmatrix}=1\Rightarrow S_n=\dfrac{1}{2}$

这种常规的求和方法称为柯西和.但对于某些无柯西和的无穷级数,有如下方法:

设 X_n 为级数的通项,记 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为此无穷级数前 n 项和,当 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$ (柯西和)不存在时,记 $B_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_n}{n}$

若 $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n$ 存在,称其为 X_n 构成的级数的一级平均和.若不存在,记 $C_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}B_n}{n}$

若 $\lim\limits_{n\to+\infty}C_n$ 存在,称其为 X_n 构成的级数的二级平均和.若不存在,则继续迭代

当 n 级平均和均不存在,称 X_n 构成的级数为寡平均级数

(1)平均和有一重要性质:当级数的柯西和存在时,其平均和必定存在,且与柯西和相等.试就 $X_n=2^{1-n}$ 证明这一性质

(2)求级数 1-2+3-4+5……的平均和

29. (6 分)许多超越函数可展开成幂级数形式,称为泰勒展开,且泰勒展开函数可看作与原函数等同,如展开后的函数的导函数也是原函数的导函数

(1)已知 $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\ldots\ldots$,求 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\ldots\ldots$ 的值

(2)设 $e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots\ldots$ 求 a_n,并求 $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\ldots\ldots$ 的值

(3)经与(2)同样的推导可知 $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\cdots\cdots$ 利用此式回答下列问题

①求证: $\ln 2\sqrt{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}<\ln 2\sqrt{n}+\frac{1}{2}$

②求 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{(1+\frac{1}{x})^x}\right)^x$

(4)使用此种方法将 e^x,$\sin x$,$\cos x$ 展开,并将定义域拓展到复数域,可发现如下等式成立: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 试利用此公式求出 $\cos i,\sin i$ 及 i^i

30.(10 分)数列$\{a_n\}$满足 $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{ka_n}{a_n^2+1}(k>0)(a_1\neq a_2)$

⑴若对于任意 a_1,$\{a_n\}$从第二项起都递增,求 k 范围并证明其充要性

⑵若存在 a_1 使$\{a_n\}$单调递增,也存在 a_1 使$\{a_n\}$单调递减,求 k 范围,并求$\{a_n\}$递减时 a_1 的范围(用 k 表示)

⑶若存在 a_1 使$\{a_n\}$满足 $a_1>a_2<a_3>a_4<a_5\ldots\ldots$

①写出 k 与 a_1 的范围

②求证: $a_{2n}<\sqrt{k-1}<a_{2n-1}$,且$\{a_{2n-1}\}$单调递减,$\{a_{2n}\}$单调递增

31. (12 分)函数 $f(x)=\ln x,g(x)=\frac{1}{a^3}(ax+b-\frac{m}{ax+c})(a>0),h(x)=f(x)-g(x)$,且 $h(1)=h'(1)=0$

(可能用到的数据: $\sqrt{21}\approx 4.5826,\sqrt{34}\approx 5.831,\sqrt{501}\approx 22.383$)

(1)试用 a,c 表示 b,m

(2)若 a=2,8c 为整数且 $c>0$,$h(x)$在 $(\frac{1}{2},1)$ 上递减,求 c 的取值范围及此条件下使 $h'(\frac{1}{2})$ 最小的 c 值

(3)若 a=2,h(x)在 $(\frac{1}{2},1)$ 上递增,求 c 的取值范围,并求在此条件下使 $h'(\frac{1}{2})$ 最小的 c 值

(4)利用(2)(3)问的结论,试解决以下问题

①欧米加常数 $\Omega=(\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})^{\cdots\cdots}}}$,求证: $0.5661<\Omega<0.5692$

②试估计函数 $s(x)=e^x-\ln x$ 的最小值(保留三位有效数字)

32.(12 分)函数 $f(x)=\ln x+\frac{b}{x}+a-1$ 有两个零点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$

(1)若对于 $\forall f(x)$,均有 $k>ab$,求 $k_{\min}$

(2)若对于 $\forall f(x)$,均有 $tx_1+x_2>(t+1)e^{-a}$,求 t 的取值范围

(3)求证: $2e^{-a}<x_1+x_2<3e^{-a}-b$

(4)求证: $b^2<x_1x_2<be^{-a}$

选做部分(请在以下两大题中任选一道大题按要求作答)

33.(12 分)(本题请任选三小问作答)事实证明,将字母赋予具体化意义有助于解决许多代数问题

(1)正实数 a,b 满足 $\sqrt{a^2-9}+\sqrt{b^2-25}=16$,求 $15a+13b$ 的最小值

(2)x,y 为实数,求 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ 的最小值

(3)x,y 为实数且 $xy=2$,设 $a=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$, $b=\sqrt{(x-2)^2+(y-26)^2}$,求 $a+b$ 与 $a+\sqrt{2}b$ 的最小值

(4)正实数 x,y,z 满足 $x+y+z=xyz$,求 $\frac{182}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{210}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{195}{\sqrt{1+z^2}}$ 的最大值

(5)实数 a_1,a_2,b_1,b_2 满足 $2a_1^2+3b_1^2=2a_2^2+3b_2^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2=6$,求 $a_1^2+a_2^2$ 与 $b_1^2+b_2^2$

(6)实数 a_1,a_2,b_1,b_2 满足 $2a_1^2+3b_1^2=2a_2^2+3b_2^2=6$, $a_1a_2+b_1b_2=0$,求 $\frac{1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{1}{a_2^2+b_2^2}$

(7)实数 x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 满足 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=1, x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$

求证: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$

34. (12 分) (本题请任选两小问作答)平面几何自欧几里德《原本》建立了公理化体系之后大放异彩,其思想方法博大精神,无套路可寻,其中某些图形简洁而优美,令人印象深刻

(1) 在△ABC 中,E、F 为 BC 边上的点,已知∠CAE=∠BAF,CE=BF.求证:AC=AB

(2) 在等腰△ABC 中,延长边 AB 到点 D,延长边 CA 到点 E,连接 DE,恰有 AD=BC=CE=DE.求∠BAC

(3) 在△ABC 中,AB=AC,∠A=20°,点 D,E 分别在边 AC,AB 上,满足∠CBD=65°,∠BCE=25°.求∠BDE